1　場の運動方程式のローレンツ変換性

本稿では、作用が場のローレンツ変換に対して不変ならば、そのオイラー・ラグランジュ方程式はローレンツ変換に対して共変であることを示す。

場 $\psi(x)$ がローレンツ群のある表現に従って変換し、かつ作用 $S[\psi]$ がその変換で不変であるとする。このとき S を $\psi(x)$ で変分することによって得られるオイラー・ラグランジュ方程式は、やはりローレンツ群のある表現にしたがって変換されることを見る。なお場が従うローレンツ群の表現と、オイラー・ラグランジュ方程式が従う表現とは一般には異なり、むしろ双対な表現になっていると言える。

まず第 2 節で場がローレンツ変換でどのように変化するかをおさらいする。第 3 節でオイラー・ラグランジュ方程式が従うローレンツ変換則を考察する。最後に第 4 節でいくつかの例を挙げる。

2　場のローレンツ変換

場とは時空上に様々な量、一般には多成分量、が分布しているものである。例えばベクトル場は時空上の各点にベクトル値が割り当てられている。ベクトルはローレンツ変換に従ってある種の変換を行う。するとベクトル場においては、ベクトルの成分についてのローレンツ変換と同時に、その引数である時空点もローレンツ変換で変化する。本稿では場の 1 点上のローレンツ変換性は与えられているものとし、それが場として構成されたときのローレンツ変換性を議論する。

ところでローレンツ変換を論じる際には、見方によって passive な視点と active な視点の二つの立場がある。例えば回転を例に考えよう。場の分布を反時計回りに回転させることにする。passive な視点とは、座標を再設定することで回転を引き起こそうという視点であり、active な視点とは、場の分布そのものを回転させようという視点である。これらは見方の違いだけであり、数学的表式は同じである。

まず active な視点から。x 軸および y 軸はそのまま動かさずに、場の配位を反時計回りに回す（図 1）。

図 1 の左の図における点 $\boldsymbol{x}$ が場の大きさのピークだとする。回転後の場のピークは $\boldsymbol{x}'$ に移ることになる。ただし、$\boldsymbol{x}' = \Lambda \boldsymbol{x}$。

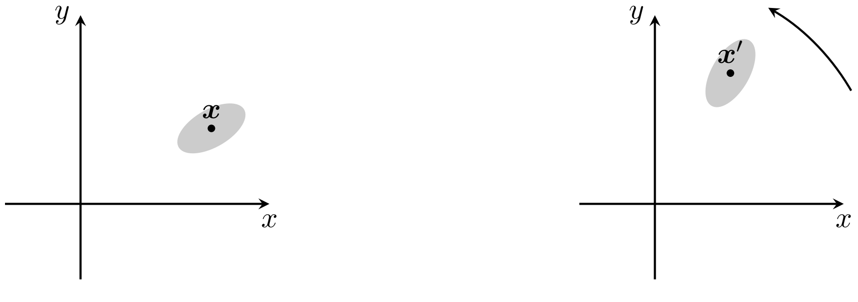

図 1: （左）回転前の場の配位　（右）回転後の場の配位

図 2: （左）回転前のベクトル場の配位　（右）回転後のベクトル場の配位

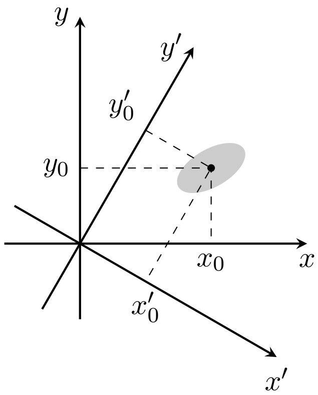

図 3: 同じ場の配位を互いに異なる座標系で参照する

ここで具体的にスカラー場を考えよう。回転前の場の配位を $\phi(\boldsymbol{x})$、回転後の場の配位を $\phi'(\boldsymbol{x})$ とする。回転後の場の配位の $\boldsymbol{x}'$ における値は回転前の場の配位の $\boldsymbol{x}$ における値であったので、

$$\phi'(\boldsymbol{x}') = \phi(\boldsymbol{x})$$

つまり

$$\phi'(\Lambda\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$$

を得る。よって

$$\phi'(\boldsymbol{x}) = \phi(\Lambda^{-1}\boldsymbol{x})$$

となる。

次にベクトル場の場合で考えてみよう（図 2）。ベクトル場の場合もスカラー場と同様の考え方が適用できる。さらにベクトル自体は図 2 より明らかなように、反時計回りに回る。

以上より、ベクトル場 $A^\mu(\boldsymbol{x})$ は

$$A'^\mu(\boldsymbol{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}\boldsymbol{x})$$

の変換則を満たす。

次に passive な視点を見ていく。座標系の x 軸および y 軸を時計回りに回転させることで、相対的に場の分布が反時計回りに回ることになる（図 3）。

図 3 のピークの位置は xy 座標で見た時は $(x,y)=(x_0,y_0)$ であり、$x'y'$ 座標で見た時は $(x',y')=(x'_0,y'_0)$ である。これら二つの点は幾何学的には同じ点を表しており、ただ座標の値が異なるだけである。場を x,y の関数として表したものを $\phi(x,y)$、および x',y' の関数として表したものを $\phi'(x',y')$ とする。ϕ も ϕ' も同じ場を表しているが関数形は異なるというわけである。すると

$$\phi(x_0,y_0)=\phi'(x'_0,y'_0)$$

が成り立つ。あるいは $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ および $\boldsymbol{x}'_0=(x'_0,y'_0)$ と書くことにすると、

$$\phi(\boldsymbol{x}_0)=\phi'(\boldsymbol{x}'_0)$$

である。ところで $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}'_0$ は $\boldsymbol{x}'_0=\Lambda\boldsymbol{x}_0$ で関係付いているので、

$$\phi(\Lambda^{-1}\boldsymbol{x}'_0)=\phi'(\boldsymbol{x}'_0)$$

が成り立つ。以上の考察から一般の点 $\boldsymbol{x}$ においても

$$\phi'(\boldsymbol{x})=\phi(\Lambda^{-1}\boldsymbol{x})$$

が成り立つ。

以上から、active な視点も passive な視点も、数学的表式は同じであることが分かる。

3 場の運動方程式のローレンツ変換性

3.1 証明する命題

まずこれから証明する命題をきちんと述べよう。

命題 3.1 (オイラー・ラグランジュ方程式の相対論的共変性)**.** 相対論的場 $\psi(x)$ についての作用 S がローレンツ不変であれば、オイラー・ラグランジュ方程式は相対論的共変性を持つ。

ハミルトンの原理によれば、オイラー・ラグランジュ方程式は作用の値が極値になるような場の配位が満たす方程式である。極値をとるような場の配位はローレンツ変換の前後で変わらないので、その意味ではローレンツ変換前にオイラー・ラグランジュ方程式を満たす場はローレンツ変換後もオイラー・ラグランジュ方程式を満たすはずである。

本稿ではこれをきちんと計算して証明したい。

また、ここで方程式が共変性を持つという言葉の意味を明確にしておきたい。場のオイラー・ラグランジュ方程式は ψ の作用 $S[\psi]$ を使って

$$\frac{\partial}{\partial\psi}-\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\psi)}=0 \tag{1}$$

と書かれる。この左辺に注目してほしい。ローレンツ変換に伴い、左辺の式自体もローレンツ共変に振る舞うということもこれから証明したい。右辺 0 は明らかにローレンツ不変なので、(1) の方程式全体で見てもやはり共変である。これを以って方程式が共変性を持つと言うことにする。

3.2 スカラー場の場合

まず、簡単のためスカラー場 $\phi(x)$ の場合について証明しよう。作用 $S[\phi]$ はラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を使って

$$S[\phi] = \int d^4x \; \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right)$$

と与えられる。ローレンツ変換 $x' = \Lambda x$ 後のスカラー場の配位を $\phi'(x)$ とする。すなわち

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

である。

S がローレンツ不変であることから、$\mathcal{L}$ もある四元ベクトル K^μ の発散を除いてローレンツ不変である。すなわち、

$$\mathcal{L}'(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \partial_\mu K^\mu(x) \tag{2}$$

が成り立つ。ところで、これから S の変分を考えるので、$\partial_\mu K^\mu$ の項は変分には寄与せず、以下の議論では無視して良い。するとこの式は、ローレンツ変換前の場で構成したラグランジアン密度と、ローレンツ変換後の場で構成したラグランジアン密度が等しいことを意味する。

さて、ローレンツ変換後の場 $\phi'(x)$ の満たす運動方程式を求めよう。それには $S[\phi']$ の $\phi'(x)$ に関する変分を計算すればよい。結果として導かれる方程式はスカラー場の変換則を満たすことになる。

まず $S[\phi']$ を $\phi'(x)$ で変分する。すなわち

$$\begin{aligned}\delta S[\phi'] &= \int d^4x \; \delta\mathcal{L}'\left(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)\right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi'(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi'(x))}\right) \delta\phi'(x)\end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi'(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi'(x))} \tag{3}$$

を得る。

次に同じ変分を以下の手順で計算してみる。まず、ラグランジアン密度の不変性 (2) 式より

$$\begin{aligned}\delta S[\phi'] &= \int d^4x \; \delta\mathcal{L}'\left(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)\right) \\ &= \int d^4x \; \delta\mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right)\end{aligned}$$

である。$S[\phi']$ を $\phi'(x)$ で変分するわけであるが、$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(y)$、ただし $y = \Lambda^{-1}x$、と書くことにすると、

$$= \int d^4y \; \delta\mathcal{L}\left(\phi(y), \frac{\partial}{\partial y^\mu}\phi(y)\right)$$

と書ける。ここで積分変数を x から y に置き換えた。またローレンツ変換では積分測度が不変 $dx^4 = dy^4$ であることも使った。これを $\phi(y)$ で変分することによって

$$= \int d^4y \left(\frac{\partial}{\partial\phi(y)} \mathcal{L}\left(\phi(y), \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\phi(y)\right) - \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\phi(y)\right)} \mathcal{L}\left(\phi(y), \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\phi(y)\right) \right) \delta\phi(y)$$

より

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)(y) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)(\Lambda^{-1}x) \tag{4}$$

を得る。ここでは変分を座標 $y = \Lambda^{-1}x$ における場 $\phi(y)$ で行い、座標微分も y で行っている。

(3) 式と (4) 式を等置することにより

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi'} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi')}\right)(x) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)(\Lambda^{-1}x)$$

を得る。これは正にスカラー場のローレンツ変換則と同じになっている。これが示したかったことである。

3.3 一般の場の場合

場 $\psi(x)$ は

$$\psi'_a(x) = D_a{}^b \psi_b(\Lambda^{-1}x)$$

と変換するものとする。ここで a, b は多成分場 ψ の各成分を表す。ベクトル場であれば時空の足、スピノル場であればスピノルの足である。また $D_a{}^b$ は多成分場の変換行列であり、ローレンツ群の表現行列である。ローレンツ変換で作用が不変であれば、

$$S[\psi] = S[\psi']$$

であるが、ラグランジアン密度で表せば

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right) = \mathcal{L}'\left(\psi'(x), \partial_\mu\psi'(x)\right)$$

である。ここでも四元ベクトルの発散項は、後の変分では寄与しないことから、省略した。

ローレンツ変換後の場 $\psi'(x)$ の方程式を求めるために、$S[\psi']$ を $\psi'_a(x)$ で変分する。

$$\delta S[\psi'] = \int d^4x\ \delta\mathcal{L}'\left(\psi'(x), \partial_\mu\psi'(x)\right).$$

ここでラグランジアン密度の不変性より

$$= \int d^4x\ \delta\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right)$$

である。積分変数を x から $y=\Lambda^{-1}x$ に変更することによって、

$$= \int d^4y\ \delta\mathcal{L}\left(\psi(y), \partial_\mu\psi(y)\right))$$

を得る。計算を進めて

$$\begin{aligned}
\delta S[\psi'] &= \int d^4y\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_a{}^b\psi_b(y))} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_a{}^b\partial_\mu\psi_b(y))}\right)\delta(D_a{}^b\psi_b(y)) \\
&= \int d^4y\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{D_a{}^b\partial\psi_b(y)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{D_a{}^b\partial(\partial_\mu\psi_b(y))}\right)\delta\psi'_a(y)
\end{aligned}$$

を得る。

場の成分に対するローレンツ変換は、点変換の一つの例になっており、点変換に対する運動方程式の変換性は解析力学の本に大抵載っているであろう。が、ここでは改めて計算してみる。

ところで、

$$\frac{\partial}{\partial(D_a{}^b\psi_b(y))} = \frac{\partial}{D_a{}^b\partial\psi_b(y)}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi_a(y)} &= \frac{D_b{}^c\partial\psi_c(y)}{\partial\psi_a(y)}\frac{\partial}{D_b{}^d\partial\psi_d(y)} \\
&= D_b{}^c\delta_c{}^a\frac{\partial}{D_b{}^d\partial\psi_d(y)} \\
&= D_b{}^a\frac{\partial}{D_b{}^d\partial\psi_d(y)}
\end{aligned}$$

から

$$\frac{\partial}{\partial\psi_a(y)}(D^{-1})_a{}^c = D_b{}^a\frac{\partial}{D_b{}^d\partial\psi_d(y)}(D^{-1})_a{}^c = \frac{\partial}{D_c{}^d\partial\psi_d(y)}$$

が得られる。同様に

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\psi_a(y))}(D^{-1})_a{}^c = \frac{\partial}{D_c{}^d\partial(\partial_\mu\psi_d(y))}$$

を得る。よって

$$\delta S[\psi'] = \int d^4y\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_b(y)}(D^{-1})_b{}^a - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_b(y))}(D^{-1})_b{}^a\right)\delta\psi'_a(y)$$

から

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_b} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_b)}\right)(\Lambda^{-1}x)(D^{-1})_b{}^a$$

を得る。これと

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi'_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\psi'_a)}\right)(x)$$

を等置することにより、最終的に

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi'_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\psi'_a)}\right)(x)=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_b}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_b)}\right)(\Lambda^{-1}x)(D^{-1})_b{}^a$$

を得る。

このことから場が $D_a{}^b$ の表現行列で変換するとき、運動方程式は $(D^{-1})_b{}^a$ で変換することが分かる。これは双対な表現の変換性であり、したがって運動方程式はローレンツ共変であることが示せた。

4 具体例

ここで具体的に ψ がベクトル場およびディラック場の場合について見てみよう。

反変ベクトル A^μ はローレンツ変換によって

$$A'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

と変換する。つまり $D=\Lambda$ である。A^μ で変分して得られたオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}-\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A^\mu)}\right)(x)=0$$

である。左辺はローレンツ変換により

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^\mu}-\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\rho A'^\mu)}\right)(x) &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\nu}-\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A^\nu)}\right)(\Lambda^{-1}x)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\nu}-\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A^\nu)}\right)(\Lambda^{-1}x)\end{aligned}$$

と、共変ベクトル場のように変換することが分かる。例えば、マクスウェル場の作用を反変ベクトルで変分して得たオイラー・ラグランジュ方程式は、共変ベクトルについての方程式になることを思い出してほしい。

次にディラックスピノル ψ について考える。ψ はローレンツ変換によって

$$\psi'=\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$$

と変換するとする。ここで、$\Lambda_{\frac{1}{2}}$ はディラックスピノルにおける表現行列であるが、具体的な形は他書を参照していただきたい。したがって、今の場合 $D=\Lambda_{\frac{1}{2}}$ である。ψ_α で変分して得られたオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha)}\right)(x)=0$$

である。左辺はローレンツ変換により

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi'_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\psi'_\alpha)}\right)(x)=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\beta}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_\beta)}\right)(\Lambda^{-1}x)(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})_{\beta\alpha}$$

と変換する。

特に一例として、一般的に採用されているディラック場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

で与えられ、ψ で変分することで、運動方程式

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

を得たのであった。あるいは同じことだが

$$-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi = 0.$$

である。

しかるに、ローレンツ変換によって運動方程式の左辺は

$$(i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi})(x) \longrightarrow (i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi})(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$$

と変換することになる。この右辺はやはり書き換えることによって

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi)(\Lambda^{-1}x)$$

となり、これも他書にある通りである。