物理学者のためのスピノル入門

第1章　回転群とスピノル

本稿の目的は、物理学ではおなじみのスピノルについて、もう少し直観的な理解に近づけるような解説を試みるものである。

スピノルは電子をはじめとするフェルミオンが従うローレンツ共変な量である。これは数学的な言い方をするならば、スピノルはローレンツ群の一つの表現になっている。しかし、同じくローレンツ群の表現であるところのベクトルと比較すると、スピノルはいささか抽象的であり、特に初学者にはつまづきやすい概念であろう。

この章では、ローレンツ群の部分群である回転群を取り上げる。そして回転群の一つの表現としてのスピノルを考察する。

1.1　ステレオグラフ射影

この節の目的はスピノルとベクトルの間の幾何学的関係を考察することにある。そのためにはステレオグラフ射影 (stereographic projection) が極めて有用である。なお、ここでの議論は Penrose, Rindler [1] に負うところが大きい。

座標 (x, y, z) が設定された三次元空間を考えよう。原点 O を中心とする二次元球面を S^2 とする。

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

S^2 上の任意の点 $P = (x, y, z)$ に対し単位ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を対応させると、これは自然な一対一対応になっている。そこで、以後 P と $\overrightarrow{OP}$ を同一視することにし、特に混乱のない限り区別して述べない。

原点を中心とする回転は S^2 上の点を S^2 に写す。したがって回転群を考えるに当たっては、S^2 上の点に注目して議論すれば十分である。

この節では S^2 上の点を一つの複素数で座標付けすることを考える。この複素数から二成分スピノルの概念が自然に導かれる。

S^2 上の点と複素数 ζ を以下の幾何学的方法で対応付ける（図 1.1）。

まず、$P \in S^2,\ P \neq (0, 0, 1)$ に対して、次のように複素数 ζ を対応させる。すなわち、北極 $N = (0, 0, 1)$ から点 $P = (x, y, z) \neq N$ を通る直線を引き、それが xy 平面 Σ と交わる点を $P' = (x', y', 0)$ とする。この写像 $S^2 - \{N\} \to \Sigma,\ P \mapsto P'$ をステレオグラフ射影と呼ぶ。x, y, z と x', y' の関係は簡単な幾何学的考察により

$$x' = \frac{x}{1-z}, \quad y' = \frac{y}{1-z}$$

である。そして $\zeta = x' + iy'$ を定義する。つまり

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{1.1}$$

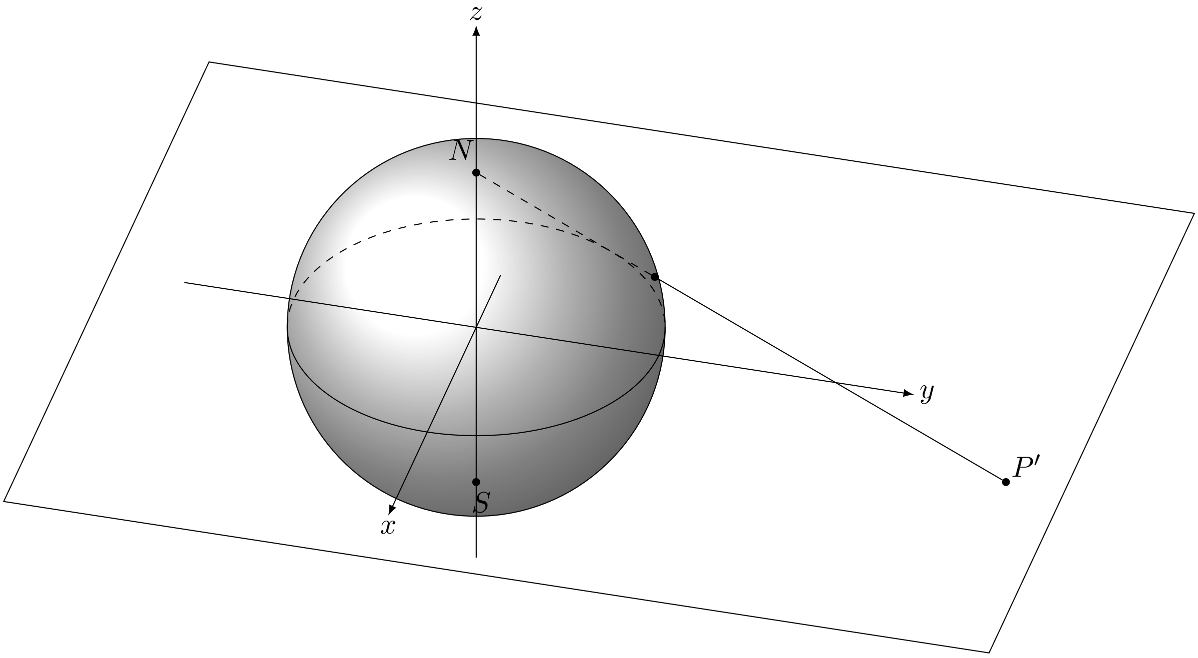

図 1.1: ステレオグラフ射影

Σ を座標 ζ で貼った複素平面とみなす。この複素平面 Σ を Argand 平面と呼ぶ。 この写像は $S^2 - \{N\}$ から Σ の上への一対一写像になっており、逆写像 $\Sigma \to S^2 - \{N\}$ を定義できる。

$$x = \frac{\zeta + \zeta^*}{\zeta\zeta^* + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \zeta^*}{i(\zeta\zeta^* + 1)}, \quad z = \frac{\zeta\zeta^* - 1}{\zeta\zeta^* + 1}. \tag{1.2}$$

この対応関係により $S^2 - \{N\}$ と Σ が同相であることが分かるので、$S^2 - \{N\}$ の座標系として (x, y, z) の代わりに ζ を用いることができる。

ところで、この対応では $N = (0, 0, 1)$ に対応する ζ が定義されていない。これは、二次元球面 S^2 と平面 Σ が同相でないことの帰結である。しかし N に収束する S^2 上の任意の点列を考えると、それに対応する ζ は発散することが分かる。そこで無限遠点 $\zeta = \infty$ を N に対応させることで、S^2 と $\Sigma + \{\infty\}$ を同相にできる。$\Sigma + \{\infty\}$ は Σ を一点コンパクト化したものになっている。

ところで、$\zeta = \infty$ を数学的に扱うのは困難があるので、ζ を二つの複素数 ξ_0, ξ_1 の比として表そう。

$$\zeta = \frac{\xi_0}{\xi_1}.$$

すると $\zeta = \infty$ は $\xi_1 = 0$ で表せることになる。任意の複素数 λ に対して、(ξ_0, ξ_1) と $(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$, $\lambda \neq 0$ は同じ ζ を与えるので、それらは S^2 上の同じ点を表すことになる。複素数のペア (ξ_0, ξ_1) に $(\xi_0, \xi_1) \sim (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$ で同値関係を入れたものを斉次座標と呼び $[\xi_0, \xi_1]$ と書く。ただし、ξ_0, ξ_1 は同時に 0 になることはないものとする。先ほどの議論より $[\xi_0, \xi_1]$ と S^2 上の点は一対一に対応する。 $[\xi_0, \xi_1]$ を使うと、(1.2) 式は

$$x = \frac{\xi_0\xi_1^* + \xi_0^*\xi_1}{\xi_0\xi_0^* + \xi_1\xi_1^*}, \quad y = \frac{\xi_0\xi_1^* - \xi_0^*\xi_1}{i(\xi_0\xi_0^* + \xi_1\xi_1^*)}, \quad z = \frac{\xi_0\xi_0^* - \xi_1\xi_1^*}{\xi_0\xi_0^* + \xi_1\xi_1^*}. \tag{1.3}$$

となる。(1.3) 式は $(\xi_0,\xi_1) \longrightarrow (\lambda\xi_0,\lambda\xi_1)$ で不変であることに注意しよう。

ところで、一つの $[\xi_0,\xi_1]$ を与えるような (ξ_0,ξ_1) は複素数倍の任意性があったのだが、この任意性を逆手にとって、常に

$$|\xi_0|^2+|\xi_1|^2=\sqrt{2} \tag{1.4}$$

が成り立つように (ξ_0,ξ_1) を規格化する。ここで $\sqrt{2}$ で規格化するのは単なる慣習である。(ξ_0,ξ_1) を常に規格化して扱うことにするならば、$[\xi_0,\xi_1]$ と (ξ_0,ξ_1) は同一視できる。

すると (1.3) 式は、

$$x=\frac{\xi_0\xi_1^*+\xi_0^*\xi_1}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{-i\xi_0\xi_1^*+i\xi_0^*\xi_1}{\sqrt{2}},\quad z=\frac{\xi_0\xi_0^*-\xi_1\xi_1^*}{\sqrt{2}}. \tag{1.5}$$

と簡単化できる。(1.5) 式は

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0\ \xi_1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0^*\\\xi_1^*\end{pmatrix},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0\ \xi_1)\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0^*\\\xi_1^*\end{pmatrix},$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0\ \xi_1)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0^*\\\xi_1^*\end{pmatrix}$$

と書ける。ついでに (1.4) 式は

$$1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0\ \xi_1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0^*\\\xi_1^*\end{pmatrix}$$

と書ける。

ここでパウリ行列

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を導入する。ただし、行列の添字の位置は $(\sigma^i)^{\alpha\beta}$ のように上に書くことにし、その規約の下での行列表示が上記のようであるとする。すると、$(x^1,x^2,x^3)=(x,y,z)$ に対し

$$x^i=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_\alpha(\sigma^i)^{\alpha\beta}\xi_\beta^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^T\sigma^i\xi^* \tag{1.6}$$

と書ける。また便宜のため

$$\sigma^0=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

を導入すると

$$1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_\alpha(\sigma^0)^{\alpha\beta}\xi_\beta^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^T\sigma^0\xi^*$$

と書ける。ここにおいて、$[\xi_0,\xi_1]$ から、それに対応する (x,y,z) を導く関係式を得たことになる。

ξ_α をスピノルと呼ぶ。(1.6) 式はスピノルが与えられたときに、それに対応する二次元単位球面上の点を与える式である。

逆に二次元単位球面の点から、それに対応するスピノルを与える式を見出そう。これは (1.6) 式の逆関数に当たる。(1.4) 式と (1.5) 式より、

$$\xi_0\xi_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy),\quad \xi_1\xi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$$

$$\xi_0\xi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z),\quad \xi_1\xi_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-z)$$

を得る。これはまとめると

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}(\xi_0^*\ \xi_1^*) = \begin{pmatrix} \xi_0\xi_0^* & \xi_0\xi_1^* \\ \xi_1\xi_0^* & \xi_1\xi_1^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となる。

ここで

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を導入する。ただしこちらの場合は行列の添字の位置は $(\sigma_i)_{\alpha\beta}$ のように下に書くことにし、その規約の下での行列表示が上記のようであるとする。すると

$$\xi_\alpha\xi_\beta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\sigma_0 + x^i\sigma_i\right)_{\alpha\beta} \quad あるいは \quad \xi\xi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\sigma_0 + x^i\sigma_i\right) \tag{1.8}$$

と書ける。$(\sigma_i)_{\alpha\beta}$ の符号には注意しよう。後述するが、実は $(\sigma_2)_{\alpha\beta}$ と $(\sigma^2)^{\alpha\beta}$ は互いに符号が逆であるように見えるが、本質的には同じものである。

ここで次のことに注意しておこう。まず (x,y,z) が単位長さであるか否かにかかわらず、行列 $x^i\sigma_i$ はエルミートかつトレースが 0 である。逆に任意のエルミートかつトレースが 0 の行列は $x^i\sigma_i$ の形に書ける。

$$^\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Longrightarrow x^i\sigma_i = \left(x^i\sigma_i\right)^\dagger,\quad \mathrm{tr}\, x^i\sigma_i = 0$$
$$^\forall X\in M(2,\mathbb{C}),\ X = X^\dagger,\ \mathrm{tr}\, X = 0 \Longrightarrow {}^\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ X = x^i\sigma_i.$$

ただし $M(2,\mathbb{C})$ は 2 行 2 列の複素行列の集合。

次に (x,y,z) が単位長さである時、かつその時に限り

$$\det\left(1\sigma_0 + x^i\sigma_i\right) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

である。(1.8) 式の右辺は 2×2 の行列であり、その行列式が 0 であれば rank は 1 となる。一般に rank が 1 の行列はある列ベクトル λ,μ を使って $\lambda\mu^\dagger$ と書ける。さらに、その行列がエルミートであれば $\lambda=\mu$ であることも分かる。以上より (1.8) 式の右辺の行列式が 0 の時、かつその時に限り、左辺のような形に書ける。逆に言うと、単位長さではない三次元ベクトル (x,y,z) では左辺のような列ベクトルと行ベクトルのテンソル積の形には書けないことになる。その意味ではスピノル ξ が表現できるのは単位ベクトルのみであるということが分かる。ところで後で詳しく議論するように (1.8) 式の右辺自体は単位長さとは限らない任意のベクトルも扱える。

1.2　スピノルの線形変換

ここでスピノル ξ_α に対してどのような線形変換が可能かを考察する。

ξ_α は 2 次元であるので、考えうる最も一般的な線形変換は 2×2 行列である。ここでは群の表現としての線形変換に興味があるので、正則な線形変換 $GL(2,\mathbb{C})$ に話を限る。また規格化条件 $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=\sqrt{2}$ を満たす必要があるので、ユニタリな線形変換 $U(2,\mathbb{C})$ を考えることになる。ところで (ξ_1,ξ_2) と $(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2)$ は同じ ζ を与えることから、特殊ユニタリ変換 $SU(2,\mathbb{C})$ に限っても一般性を失わない。このことは (1.6) 式からも分かる。以上から、スピノル ξ_α に対して許される変換は $SU(2,\mathbb{C})$ を考えれば十分であることが分かった。以後 $SU(2,\mathbb{C})$ を単に $SU(2)$ と書くことにする。

さて、(1.4) で規格化されたスピノル ξ_α は二次元単位球面 S^2 上の点 (x,y,z) と関係するのであった。スピノルをユニタリ変換すると、S^2 上の点はどのように変換するだろうか？ これは回転 $SO(3)$ になる。

定理 1.2.1. スピノル ξ_α に対する $SU(2)$ 変換は、二次元単位球面 S^2 上の点 x^i に対して $SO(3)$ 変換を引き起こす。

証明. まず ξ_α に対する $SU(2)$ 変換は x^i に対して線形変換を引き起こすことを示す。スピノルの変換

$$\xi \longrightarrow \xi' = U\xi$$

によって、(1.8) 式は

$$\xi\xi^\dagger \longrightarrow U\xi\xi^\dagger U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}U(1\sigma_0+x^i\sigma_i)U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\sigma_0+Ux^i\sigma_iU^\dagger)$$

と変換する。行列 $Ux^i\sigma_iU^\dagger$ の各成分は x,y,z の斉次一次式であることは明らかである。また $Ux^i\sigma_iU^\dagger$ はエルミートかつトレースが 0 である。したがってある (x',y',z') を使って $Ux^i\sigma_iU^\dagger = x'^i\sigma_i$ と書ける。最後に、この (x',y',z') が単位ベクトルであることを示さなければならない。ところで U はユニタリだから

$$\det\bigl(1\sigma_0+x'^i\sigma_i\bigr) = \det\Bigl(U(1\sigma_0+x^i\sigma_i)U^\dagger\Bigr) = \det\bigl(1\sigma_0+x^i\sigma_i\bigr)$$

であり、(x,y,z) が単位ベクトルなので (x',y',z') も単位ベクトルである。より一般にはユニタリ変換によって三次元ベクトルの長さは不変である。以上より、スピノルの $SU(2)$ 変換によって S^2 上の点 (x,y,z) は S^2 上の点 (x',y',z') に線形に写ることが分かった。

ここでもちろん (x',y',z') と $\xi'=U\xi$ には次の関係

$$\xi'\xi'^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\sigma_0+x'^i\sigma_i)$$

があることを蛇足ながら述べておく。

次に、この線形変換が直交変換であることを言わなければならないが、そのためには (x,y,z) の長さを変えないことを言えば十分である。しかるに前段落でそれを既に示してある。

最後にこの直交変換の行列式が 1 であることを示す。これは以下のようにトポロジーの手法を用いて証明される。

2 次の単位行列 I からユニタリ行列 U への連続変形 $A(\lambda)$ を考える。ただし、$0 \le \lambda \le 1,\ A(0) = I,\ A(1) = U$。また、任意の λ に対して $A(\lambda)$ はユニタリであるとする。スピノルの変換

$$\xi' = A(\lambda)\xi$$

によって (x, y, z) は直交変換を受けるが、λ の連続的変化に伴い、この直交変換の行列式も連続的に変化する。しかるに、直交変換の行列式は 1 かまたは -1 の値しか取りえない。よって、λ が連続的に変化しても行列式は不変である（もし 1 から -1 にジャンプするようなことがあれば、連続性に反する）。ところで単位行列 I が引き起こす直交変換はやはり恒等変換であり、その行列式は 1。よって U が引き起こす直交変換も行列式は 1 である。

以上より、定理は示された。 □

以後、$U \in SU(2)$ が引き起こす $SO(3)$ 変換を $R(U)$ と書くことにする。すなわち

$$\xi' = U\xi \Longleftrightarrow x'^i = R^i{}_j(U)x^j$$

である。

逆に、任意の回転 $R \in SO(3)$ が与えられたとき、これを引き起こすような $SU(2)$ 変換はあるだろうか？ これも真である。これを示すために x 軸周りの回転、y 軸周りの回転および z 軸周りの回転を具体的に構成してみよう。まず z 軸周りの回転は直観的に分かる。(1.1) 式より z 軸周りの角度 θ の回転は $\zeta \longrightarrow e^{i\theta}\zeta$ で表せる。これは ξ_0, ξ_1 座標で言えば、$\xi_0 \longrightarrow e^{i\theta/2}\xi_0, \xi_1 \longrightarrow e^{-i\theta/2}\xi_1$ である。つまり

$$U_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

は z 軸周りの角度 θ の回転を引き起こす。実際このときの $R(U_z(\theta))$ を求めると

$$\begin{aligned}
& U_z(\theta)(1\sigma_0 + x^i\sigma_i)U_z(\theta)^\dagger \\
= & \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1+z & x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ x\cos\theta - y\sin\theta - i(x\sin\theta + y\cos\theta) & 1-z \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1+z' & x'+iy' \\ x'-iy' & 1-z' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であり、確かに z 軸周りの角度 θ の回転になっている。

実は

$$U_z(\theta) = \exp\ i\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

になっていることに注意しよう。右辺にパウリ行列が現れている。

x 軸周りの回転は (1.1) 式を見てもあまり自明ではないが、(1.7) 式を使えば

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \quad &\begin{pmatrix} 1+z' & x'+iy' \\ x'-iy' & 1-z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z\cos\theta+y\sin\theta & x+i(y\cos\theta-z\sin\theta) \\ x-i(y\cos\theta-z\sin\theta) & 1-z\cos\theta-y\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得るような $U_x(\theta) \in SU(2)$ を求めればよい。実はこの場合もパウリ行列を使って

$$U_x(\theta) = \exp\ i\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

とすればよいことを確かめられる。

同様に、y 軸周りの回転は

$$U_y(\theta) = \exp\ i\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

とすることにより

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \quad &\begin{pmatrix} 1+z' & x'+iy' \\ x'-iy' & 1-z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z\cos\theta-x\sin\theta & x\cos\theta+z\sin\theta+iy \\ x\cos\theta+z\sin\theta-iy & 1-z\cos\theta+x\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

ところで任意の回転は x 軸回転、y 軸回転および z 軸回転を組み合わせることにより実現可能である。したがって、それに対応して U_x、U_y および U_z を組み合わせることにより任意の回転を引き起こすユニタリ変換を作ることができる。余談だが x 軸回転、y 軸回転および z 軸回転のうちの任意の二つだけあれば、任意の回転を実現できることも示される [2]。したがって任意の回転 $R \in SO(3)$ が与えられたとき、これを引き起こすような $SU(2)$ 変換は必ず存在する。以上より、次の定理が成り立つ。

定理 1.2.2. スピノル ξ_α に対する $SU(2)$ 変換は、二次元単位球面 S^2 上の点に対して $SO(3)$ 変換を引き起こす。逆に任意の $SO(3)$ 変換に対して、それを引き起こすような $SU(2)$ 変換が存在する。

ところで、U_x, U_y, U_z の表式にパウリ行列が現れたので、それらの行列を記号 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ で表記したい衝動に駆られるが、ここではいったん保留にしたい。ローレンツ群の表現としてのスピノルを論じて後、この話題に立ち返ることにする。

ここまで回転群の表現としてのスピノルを論じてきた。話題としてはまだまだいろいろあるのだが、ここでいったん終わりにして、ローレンツ群の表現としてのスピノルに話を移したい。回転群はローレンツ群の部分群なので、ローレンツ群を論じた後、その部分群としての回転群に注意を戻せば、もっと高所から回転群のいろいろな性質を眺めることができるであろう。

関連図書

[1] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol. 1:Two-spinor calculus and relativistic fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984

[2] 山内恭彦, 杉浦光夫, 連続群論入門, 培風館, 昭和 35 年