

../

ゆったり楽しむ高等数学  
【第 28 回】シューアの補題

../

【趣旨】

数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。  
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。  
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、  
<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html>  
にも目を通していただくと、よりお楽しみいただけます。  
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

---

前回の問題と解答例

[問] 群  $G$  の表現空間  $V$  上での既約表現  $\rho$  および表現空間  $W$  上での既約表現  $\sigma$  を考える。 $V$  から  $W$  への線形写像  $A$  が任意の  $g \in G$  に対して

$$\sigma(g)A = A\rho(g)$$

となるとき、 $A$  は  $V$  から  $W$  の上への一対一写像であるか、または  $A = 0$  であることを示せ。これをシューアの補題という。

---

[解] まず  $A$  が単射であることを示す。そのために  $A$  の核  $K = \ker A = \{x \in V | Ax = 0\}$  を考えよう。仮定より、任意の  $g$  に対して  $\sigma(g)AK = A\rho(g)K$  つまり  $0 = A(\rho(g)K)$  が成り立つので、 $\rho(g)K \subset K$  である。これが任意の  $g$  について成り立っているので、 $K$  は  $\rho$  で不変である。ところで  $\rho$  は既約であるという仮定により、 $K = 0$  または  $K = V$  でなければならない。 $K = V$  ならば  $A = 0$  となるので題意が示せる。一方  $K = 0$  ならば  $A$  は単射である。

次に  $A$  が全射であることを示す。そのために  $V$  の  $A$  による像  $AV = \{Ax | x \in V\}$  を考えよう。仮定より、任意の  $g$  に対して  $\sigma(g)AV = A\rho(g)V$  なので、 $AV$  は  $\sigma$  で不変である。 $\sigma$  は既約であるという仮定により、 $AV = 0$  または  $AV = W$  でなければならない。ところで  $A$  は単射だったので  $AV \neq 0$  であり、したがって  $AV = W$  が得られる。よって全射性が示された。

---

## 問題

[問] 実数を、有理数のコーシー列を用いた構成で定義する。すなわち、任意の有理数のコーシー列の収束先の集合として実数の集合を定義する。

(例)  $\sqrt{2}$  を与える有理数のコーシー列の例として

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$$

がある。

ところで一つの実数を定義する、有理数のコーシー列は一意的でないことに注意しよう。

さて  $\alpha$  と  $\beta$  を実数とする。定義よりある有理数のコーシー列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が存在し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  が成り立つ。二つの実数の和  $\alpha + \beta$  を  $\{a_n + b_n\}$  の極限值として定義する。このとき、 $\alpha + \beta$  はそれを与えるコーシー列の選び方によらないことを証明せよ。

---

## 後記

最近 STAP 細胞のニュースを見て、いろいろ考えさせられることがありました。

特に、一度 Nature から論文をリジェクトされた際に、痛烈な批判のコメントをもらったにもかかわらず、それでもめげずに、それを実証して見せようと、昼夜を問わず実験を重ね、実証データを集めたというところが、感動的でした。

一般的に見ても、論文を出せば、最初から称賛のコメントをレフェリーからもらうということはほぼ皆無に等しく、最初は批判的であることが普通です。しかし小保方さんがもらった批判のコメントはたいへん強烈であり、自分だったらへし折れていたかもと想像しました。それだけ常識破りな発見だということの裏返しなのでしょうが ...

というわけで、私もこれからますます精進していこうと、改めて決意させていただくことができました。

---

## 広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。

大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。

またインターネット環境を使つての学習になりますので、ご自宅にいながら勉強を進めていくこと

ができます。

\_\_\_\_\_

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。  
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。  
もちろん敏感肌の方にも！

\_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克

e-mail： [dirac\\_eqn\(a\)yahoo.co.jp](mailto:dirac_eqn(a)yahoo.co.jp) (a) を@に変えてください。

公式サイト：<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/>

メルマガ登録・解除：<http://www.mag2.com/m/0001366532.html>

\_/