

../

ゆったり楽しむ高等数学

【第 26 回】円分多項式

../

【趣旨】

数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。

一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。

もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、

<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html>

にも目を通していただくと、よりお楽しみいただけます。

このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

前回の問題と解答例

[問] 1 の n 乗根の一つを ζ_n とする。 ζ_n^i ($i = 0, \dots, n-1$) はみな 1 の n 乗根である。さてこの中から原始 n 乗根だけをすべて取り出して、それらを $\zeta_n^{i_1}, \zeta_n^{i_2}, \dots, \zeta_n^{i_r}$ と書くことにする。さて

$$F_n(x) = (x - \zeta_n^{i_1})(x - \zeta_n^{i_2}) \cdots (x - \zeta_n^{i_r}) = \prod_{\zeta_n^i \text{は原始 } n \text{ 乗根}} (x - \zeta_n^i)$$

を n 次の円分多項式と呼ぶ。次の等式

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} F_d(x)$$

を証明せよ。ただし積は、 $1 \leq d \leq n$ なる n の全ての約数 d について取るものとする。

[解] 1 の n 乗根の一つ ζ_n^i を考えよう。 ζ_n^i が原始 d 乗根であることを $\zeta_n^i \in F_d$ と記すことにする（一見まぎらわしい表記だが、混乱することはないと思う）。これは $F_d(x)$ が因子 $(x - \zeta_n^i)$ を含むことを意味している。

ζ_n^i がいずれかの F_d に属することを示そう。 i と n の最大公約数を g とする。また $i = i'g$ および $n = dg$ とする。 i' と d は互いに素である。すると $\zeta_n^i = (\zeta_n^g)^{i'}$ であり、 i' と d は互いに素なのだから $(\zeta_n^g)^{i'}$ は原始 d 乗根である。よって $\zeta_n^i \in F_d$ 。

また、 $d \neq d'$ に対してある ζ_n^i が原始 d 乗根かつ原始 d' 乗根ということはありません。

以上より、1 の原始 n 乗根はいずれか一つの F_d に属しているし、また原始 d 乗根は明らかに 1 の n 乗根にもなっているので、等式が成り立つ。

問題

[問] 次の関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{q} \quad (x \text{ は有理数で、既約分数で表したときの分母 (正とする) が } q) \\ &= 0 \quad (x \text{ は無理数}) \end{aligned}$$

は x が有理数となる点で不連続、 x が無理数となる点で連続であることを示せ。

後記

最近「数学ガール ゲーデルの不完全性定理」を読みました。私は以前「数学ガール ガロア理論」を読んでおり、今回二冊目になります。

感心するのは、数学の難しい理論をかなり平易に書かれているということです。とにかく文章が流れるように読めます。リズム感が絶妙なのでしょうね。

しかも著者の結城浩さんはプログラミング本の著作もあるようです。私も SE なのですが、とにかく見習いたいものです。

広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。またインターネット環境を使つての学習になりますので、ご自宅にしながら勉強を進めていくことができます。

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克

e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp (a) を@に変えてください。

公式サイト：<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/>

メルマガ登録・解除：<http://www.mag2.com/m/0001366532.html>

_/