_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 25 回】ガンマ関数

_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

---

■前回の問題と解答例■

[問] 次の積分で定義される関数 $\Gamma(z)$ をガンマ関数という。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

ただし、$\mathrm{Re}\, z > 0$。

ガンマ関数は

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

を満たすことを示せ。特に $n$ を非負整数とすると $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ。

---

[解]

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\ &= -[t^z e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t}dt \\ &= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)\end{aligned}$$

となり、前半が示された。また

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

より

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n!$$

となり、後半が示された。

---

■問題■

[問] 1 の $n$ 乗根の一つを $\zeta_n$ とする。${\zeta_n}^i$ $(i=0,\ldots,n-1)$ はみな 1 の $n$ 乗根である。さてこの中から原始 $n$ 乗根だけをすべて取り出して、それらを ${\zeta_n}^{i_1},{\zeta_n}^{i_2},\ldots,{\zeta_n}^{i_r}$ と書くことにする。さて

$$F_n(x)=(x-{\zeta_n}^{i_1})(x-{\zeta_n}^{i_2})\cdots(x-{\zeta_n}^{i_r})=\prod_{{\zeta_n}^i\text{は原始 n 乗根}}(x-{\zeta_n}^i)$$

を $n$ 次の円分多項式と呼ぶ。次の等式

$$x^n-1=\prod_{d|n}F_d(x)$$

を証明せよ。ただし積は、$1\leq d\leq n$ なる $n$ の全ての約数 $d$ について取るものとする。

---

■後記■

この前うちの地域でお祭りがあり、その際餅まきが行われたのですが、息子が健闘したおかげで、４０個ほどのお餅をいただきました。感謝です。

ただ、今でも食べきれなく、冷蔵庫で保管中です。カビが生える前までに食べきらなければなりません。

次回は適量だけ拾うよう、アドバイスすることにします。

---



---

本郷（ほんきょう） http://honkyo.jp/

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼

_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/