_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 22 回】ルジャンドル多項式

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\}+n(n+1)P_n(x)=0$$

を満たす多項式をルジャンドル多項式という。このとき次の関係式を示せ。

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$$

ただし、$m \neq n$。

[解]

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\}+n(n+1)P_n(x)=0$$
$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}+m(m+1)P_m(x)=0$$

であるが、上式に $P_m(x)$ を、下式に $P_n(x)$ をそれぞれかけて差をとり、積分すると

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}dx\left[P_m(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\}-P_n(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}\right.\\+\quad&\left.n(n+1)P_m(x)P_n(x)-m(m+1)P_m(x)P_n(x)\right]=0\end{aligned}$$

を得る。第一項、第二項に対して部分積分を行うと、

$$
\begin{aligned}
& \left[(1-x^2)P_m(x)\frac{dP_n}{dx}\right]_{-1}^{1} - \left[(1-x^2)P_n(x)\frac{dP_m}{dx}\right]_{-1}^{1} \\
- & \int_{-1}^{1} dx \left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\frac{dP_n}{dx} - (1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}\right] \\
+ & \ (n(n+1)-m(m+1))\int_{-1}^{1} dx P_m(x)P_n(x) \\
= & \ (n(n+1)-m(m+1))\int_{-1}^{1} dx P_m(x)P_n(x) = 0
\end{aligned}
$$

を得る。仮定より $m \neq n$ なので

$$
\int_{-1}^{1} dx P_m(x)P_n(x) = 0
$$

を得る。

■解説■

実はこの解法は、「【第 14 回】エルミート行列」でやった、「エルミート行列の、異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する」ことを証明したときのと同じ論法です。この微分方程式を $P_n(x) \to$ ベクトル、微分演算子 $\to$ 線形演算子、$n(n+1) \to$ 固有値と捉えれば、この線形演算子はエルミート性を持っていることが示されます。ですので、第 14 回のと同じ論法が使えたのです。ちなみに量子力学では、この演算子は粒子の角運動量の大きさを表しています。

■問題■

[問] それぞれ正規分布に従う確率変数 X と Y があり、試行の結果次のような標本が得られたとする。

X	10.9	10.9	12.7	13.1	10.5	10.6	11.2	9.8	8.5	8.2
Y	12.5	12.4	10.6	13.0	11.2	11.1	14.3	10.9	11.6	12.6

このとき、X と Y の母分散に差があると言えるか？ 有意水準 5% で答えよ。ただし、自由度 $(9,9)$ の F 分布の上側 2.5% 点は 4.03 である。

■後記■

ウチの長男は初めての夏休みです。毎日遊びほうけてます。私が子供の時もそうでしたが。

宿題は、国語や算数などすぐにできるものは前倒しでやっています。一方図工など手間のかかるものはまだやっていません。これも私が子供の時と同じです。
私は図工や習字は 8/31 もしくは 9/1 にやるのが常でした。
今月末何が繰り広げられるか、今から楽しみです。

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/