

../

ゆったり楽しむ高等数学  
【第 19 回】テイラー展開

../

【趣旨】

数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。

一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。

もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、  
<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html>  
にも目を通していただくと、よりお楽しみいただけます。  
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

---

前回の問題と解答例

[問]  $\tan^{-1} x$  の  $x = 0$  の周りでのテイラー展開を最初の 3 項まで求めよ。

---

[解] 関数  $f(x)$  の  $x = 0$  の周りでのテイラー展開の最初の数項を書き下すと

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

である。なので、 $f(x) = \tan^{-1} x$  の  $x = 0$  での高階微分係数を求めればよい。ここでは次のようにして求める。

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

なので、

$$(1+x^2)f'(x) = 1 \quad (1)$$

を得る。まず、(1) から  $f'(0) = 1$  が分かる。

(1) の両辺を微分すると  $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$  なので  $f''(x) = 0$ 。

(1) の両辺を 2 回微分すると  $(1+x^2)f^{(3)}(x)+4xf''(x)+2f'(x) = 0$  なので  $f^{(3)}(0) = -2f'(0)/(1+0^2) = -2$ 。

(1) の両辺を 3 回微分すると  $(1+x^2)f^{(4)}(x) + 6xf^{(3)}(x) + 6f''(x) = 0$  なので  $f^{(4)}(0) = 0$ 。

(1) の両辺を 4 回微分すると  $(1+x^2)f^{(5)}(x) + 8xf^{(4)}(x) + 12f^{(3)}(x) = 0$  なので  $f^{(5)}(0) = -12f^{(3)}(0)/(1+0^2) = 24$ 。

以上より

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

を得る。

---

### 解説

テイラー展開は関数をべき級数で表そうというのですが、とても応用範囲が広いテクニックの一つになっています。

私が専攻していた物理学を例にすれば、ポテンシャルの（安定的）平衡位置からの物理量の微小なずれは調和振動子と同じ運動をするという近似が成り立ちますが、これはポテンシャル関数を二次までテイラー展開することによって近似の妥当性を導くことができます。平衡位置からの微小なずれでありさえすれば、どんな物理系でも同じ方法で記述することができるという意味では非常によく使われるツールと言えます。

---

### 問題

[問] 半順序集合  $(X, \leq)$  で  $X$  の空でない部分集合が常に最小元を持つとき、整列集合であるという（最小元とは、部分集合  $A$  の元  $a$  で任意の  $x \in A$  に対し  $a \leq x$  となるものである）。このとき次を示せ。

$(X, \leq)$  が整列集合で、 $\phi: X \rightarrow X$  が順序を保つ単射であれば、任意の  $x \in X$  に対し  $x \leq \phi(x)$  が成り立つ。

---

### 後記

ウチの長男が小学生になり早一ヶ月が経ちました。

今までは保育園だったので、毎朝親である私たちが保育園に行く準備をしていましたが、これが

らは本人が自分で行く準備をするように教育しなければなりません。ウチは前の晩にやらせるのですが、これが意外と時間がかかりますね。大人だったらさっと準備できることでも、子供はまだまだ時間がかかっています。

でも、そのうち自分でしっかり準備ができるようになるのでしょう。その日が待ち遠しいです。

---

## 広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。またインターネット環境を使つての学習になりますので、ご自宅にしながら勉強を進めていくことができます。

---

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。もちろん敏感肌の方にも！

../

### ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克

e-mail：dirac\_eqn(a)yahoo.co.jp (a)を@に変えてください。

公式サイト：<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/>

メルマガ登録・解除：<http://www.mag2.com/m/0001366532.html>

../