_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 18 回】ガウス・ボンネの定理

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 二次元球面

$$\begin{cases} x = R\sin v\cos u \\ y = R\sin v\sin u \\ z = R\cos v \end{cases}$$

（ただし、$0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < \pi$）
のガウス曲率を全面積について積分したときの値を求めよ。

[解] $X = (x, y, z)$ とおくと、

$$\begin{cases} X_u = (-R\sin v\sin u, R\sin v\cos u, 0) \\ X_v = (R\cos v\cos u, R\cos v\sin u, -R\sin v) \end{cases}$$

を得る。これより第一基本形式の係数を求めると

$$\begin{cases} (X_u, X_u) = R^2\sin^2 v \equiv E \\ (X_u, X_v) = 0 \equiv F \\ (X_v, X_v) = R^2 \equiv G \end{cases}$$

となる。

次に

$$\begin{cases} X_{uu} = (-R\sin v\cos u, -R\sin v\sin u, 0) \\ X_{uv} = (-R\cos v\sin u, R\cos v\cos u, 0) \\ X_{vv} = (-R\sin v\cos u, -R\sin v\sin u, -R\cos v) \end{cases}$$

および法線ベクトル

$$X_u \times X_v = (-R^2\sin^2 v\cos u, -R^2\sin^2 v\sin u, -R^2\cos v\sin v) \propto n$$

$$n = (\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v)$$

より、第二基本形式の係数を求めると

$$\begin{cases} (X_{uu}, n) = -R\sin^2 v \equiv L \\ (X_{uv}, n) = 0 \equiv M \\ (X_{vv}, n) = -R \equiv N \end{cases}$$

を得る。

ガウス曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{R^2}$$

と求まる。

次に積分測度は

$$\sqrt{EG - F^2}dudv = R^2\sin v dudv$$

となる。よって積分値を S と書くと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} dv \frac{1}{R^2} R^2 \sin v \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

したがって、積分値は 4π となる。

■解説■

今回の問題では、ある二次元球面についてのガウス曲率の面積積分が 4π になることを確かめました。実はこの場合も積分値は位相不変量になっており、この球面に同相な全ての二次元面について 4π となります。

ガウス・ボンネの定理によれば、二次元閉曲面のガウス曲率の面積積分はその面のトポロジーだけで決まります。球面の場合は 4π、トーラスの場合は 0 です。トーラスは穴が一個の浮き輪みたいな形ですが、穴が二つや三つの浮き輪の形も考えることができて、その場合積分値はそれぞれ -4π、-8π となります。一般に浮き輪の穴の数を g（種数という）とおくと、積分値は $4\pi(1-g)$ で与えられます。

ガウス・ボンネの定理の偉大なところは、ガウス曲率という微分幾何学の概念と、種数という位相幾何学の概念を見事に結び付けていることです。私が学生時代にこのことを知ったときにたいへん感動したことを今でもよく覚えています。

■問題■

[問] $\tan^{-1} x$ の $x = 0$ の周りでのテイラー展開を最初の 3 項まで求めよ。

■後記■

４月になりました。
電車に乗っていると、新しく入学あるいは入社する（と思しき）人たちを所々見かけるようになりました。
実はかくいう我が家も長男が小学校に入学します。ウチでは初めての小学生になります。この前生まれたと思っていましたが、いつのまにかランドセルを背負う年齢になったのですね。
このメルマガを執筆している時点では、入学式はまだであり、現在長男は家でのんびり過ごしています。
子供も入学式はドキドキなのでしょうが、親である私たちもドキドキです。

_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/