

../

ゆったり楽しむ高等数学
【第 17 回】ガウス曲率の面積分

../

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、
<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html>
にも目を通していただくと、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

前回の問題と解答例

[問] 第 16 回で次のトーラス

$$\begin{cases} x = (R + r \cos v) \cos u \\ y = (R + r \cos v) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

(ただし、 $0 < r < R, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi$)
のガウス曲率 K が

$$K = \frac{\cos v}{(R + r \cos v)r}$$

で与えられることを見た。このガウス曲率を全面積について積分したときの値を求めよ。

[解] まず積分測度は次のようになる。第 16 回のノテーションを使うと積分測度は

$$\sqrt{EG - F^2} du dv = (R + r \cos v) r du dv$$

となる。よって積分値を S と書くと

$$S = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv \frac{\cos v}{(R + r \cos v)r} (R + r \cos v)r$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} dv \cos v = 0$$

したがって、積分値は 0 となる。

解説

今回の問題で、ある二次元トーラスについてのガウス曲率の面積分が 0 になることを確かめました。実はこの積分値は位相不変量になっており、可微分な全ての二次元トーラスについて 0 となります。これはガウス・ボンネの定理という極めて美しい定理の一つの帰結になっています。ちなみに二次元球面の場合はどうなるのでしょうか？

問題

[問] 二次元球面

$$\begin{cases} x = R \cos v \cos u \\ y = R \cos v \sin u \\ z = R \sin v \end{cases}$$

(ただし、 $0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < \pi$)

のガウス曲率を全面積について積分したときの値を求めよ。

後記

インフルエンザにかかってしまいました。

ウチの家族のうち子供二人と私がかかり、妻はワクチンを以前に打っていたのでかかりませんでした。

下の子が保育園でもらってきて、上の子 私と感染したようです。

おかげで仕事を一週間休み(め?)ました。

みなさまもお気をつけくださいね。

病後明けは仕事で超多忙になりそうです ...

広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。
大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。
またインターネット環境を使つての学習になりますので、ご自宅にしながら勉強を進めていくことができます。

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

../

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克

e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp (a)を@に変えてください。

公式サイト：<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/>

メルマガ登録・解除：<http://www.mag2.com/m/0001366532.html>

../