_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 16 回】ガウス曲率

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 次のトーラスのガウス曲率を求めよ。

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

ただし、$0 < r < R, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi$。

[解] ここでは第一基本形式、第二基本形式を使って求めてみよう。$X = (x, y, z)$ とおくと、

$$\begin{cases} X_u = (-(R + r\cos v)\sin u, (R + r\cos v)\cos u, 0) \\ X_v = (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v) \end{cases}$$

を得る。これより第一基本形式の係数を求めると

$$\begin{cases} (X_u, X_u) = (R + r\cos v)^2 \equiv E \\ (X_u, X_v) = 0 \equiv F \\ (X_v, X_v) = r^2 \equiv G \end{cases}$$

となる。

次に

$$\begin{cases} X_{uu} = (-(R + r\cos v)\cos u, -(R + r\cos v)\sin u, 0) \\ X_{uv} = (r\sin v\sin u, -r\sin v\cos u, 0) \\ X_{vv} = (-r\cos v\cos u, -r\cos v\sin u, -r\sin v) \end{cases}$$

および法線ベクトル

$$X_u \times X_v = (r(R + r\cos v)\cos u\cos v, r(R + r\cos v)\sin u\cos v, r(R + r\cos v)\sin v) \propto n$$

$$n = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

より、第二基本形式の係数を求めると

$$\begin{cases} (X_{uu}, n) = -(R + r\cos v)\cos v \equiv L \\ (X_{uv}, n) = 0 \equiv M \\ (X_{vv}, n) = -r \equiv N \end{cases}$$

を得る。

ガウス曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos v}{(R + r\cos v)r}$$

と求まる。

■解説■

今回は微分幾何学の基本的量であるガウス曲率を取り上げました。ガウス曲率に関しては極めて美しい定理があるのですが、それについては次月にて。というわけで、今月の問題はこの続きとなります。

■問題■

[問] 先月の問題と同じトーラス

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

（ただし、$0 < r < R, 0 \le u < 2\pi, 0 \le v < 2\pi$）
のガウス曲率を全面積について積分したときの値を求めよ。

■後記■

　このまえ新年を迎えたと思ったら、もう２月。一年の１２分の１が過ぎたのですね。年を取ると時間が経つのが早いと、子供のころから聞かされていましたが、今まさにリアルに体験中です。

　ウチの長男も保育園卒園と小学校入学を控えて、親としては準備でいろいろ忙しくしています。大変でもあり、楽しくもある貴重な時間を過ごしています。

―――――――

　_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/