_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 15 回】コーシー列

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] コーシー列は収束することを示せ。

[解] コーシー列を $\{a_n\}$ とする。定義より、任意の正数 ε に対し、ある整数 N が存在し、任意の整数 $m, n > N$ に対し、$|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つ。特に m を固定すると、$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$ である。このことから、

$$a_m - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

および

$$a_m + \varepsilon \geq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つ。これより

$$\limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n \leq a_m + \varepsilon - (a_m - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

を得る。ε は任意だったから、$\limsup a_n = \liminf a_n$ であり、$\{a_n\}$ は収束する。

■解説■

任意の収束列がコーシー列になることはほとんど自明なのですが、その逆もまた真であることをこの定理は主張しています。この定理は非常に有用で、例えば自然対数の底 e の存在性を示すのにも使われます。収束値が具体的に分からなくても、とにかく何かに収束することだけを示したい場合にこの定理は重宝します。

■問題■

[問] 次のトーラスのガウス曲率を求めよ。

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

ただし、$0 < r < R, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi$。

■後記■

今年最初のメルマガになります。
今年もよろしくお願いします。

読者のみなさんは、今年の目標を立てられたでしょうか？ 私は去年に引き続き、統計学をやるつもりでおります。

社会人になると特にそうですが、数学の本を一冊読むのに一年では終わらないことも往々にしてありますね。

今年も良い年でありますように…。

本郷（ほんきょう） http://honkyo.jp/

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼

_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp (a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/