

../

ゆったり楽しむ高等数学
【第 14 回】エルミート行列

../

【趣旨】

数学の楽しみ方には二つ(もっと?)あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、
<http://phys.main.jp/melmag/melmag.html>
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

前回の問題と解答例

[問] エルミート行列の、異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

[解] H をエルミート行列とする。まず H の固有値は実数となることを示す。 H の任意の固有ベクトルを \mathbf{x} とし、その固有値を x と書くことにすると

$$x = (\mathbf{x}, H\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, H^\dagger \mathbf{x})^* = (\mathbf{x}, H\mathbf{x})^* = x^*$$

となり、 x は実数であることが分かる。

次に直交性を示す。任意の二つの固有ベクトルを \mathbf{x}, \mathbf{y} とすると

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}, H\mathbf{x}) &= x(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{x}, H\mathbf{y})^* \\ &= y^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})^* \\ &= y^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

ここで、固有値の実数性より、 $y^* = y$ なので

$$(x - y)(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$$

を得る。さて $x \neq y$ ならば $(y, x) = 0$ となる。つまり、異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

解説

量子力学では物理量はエルミート演算子で記述できるとされており（あくまでそう仮定するのですが）、ですのでいたるところでエルミート演算子が利用されます。当然今回の問題のような固有ベクトルの直交性も重要な役割を演じます。

問題

[問] コーシー列は収束することを示せ。

後記

今年ももうすぐ終わってしまいますね。思えば、あっと言う間の一年でした。

今年は統計学を勉強するという計画を立てていましたが、振り返ると達成度は30%ぐらいかなと思います。

みなさんは、計画通りの一年だったでしょうか？

広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。またインターネット環境を使っでの学習になりますので、ご自宅にしながら勉強を進めていくことができます。

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。特にアトピーなど肌が弱い人のためにオススメの石鹸があります。

