_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 13 回】リプシッツ条件

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] $y \geq 0$ 上で定義された微分方程式 $y' = 2\sqrt{y}$ の解を考える。この解の一つは $y = (x + C)^2$ である。ここで C は任意定数である。また方程式の形から明らかに分かるように $y = 0$ もまた解になっている。さらに任意の定数 C に対して、

$$\begin{cases} 0 & x < C \\ (x - C)^2 & x \geq C \end{cases}$$

もやはり解になっている。そこで次のことが分かる。すなわち、微分方程式 $y' = 2\sqrt{y}$ の解で、初期条件 $y(0) = 0$ を満たすものは

$$\begin{cases} 0 & x < C \\ (x - C)^2 & x \geq C \end{cases}$$

である。ただし C は $C \geq 0$ なる任意の定数。さて、このように解が一意に決まらない理由を述べよ。

[解] 理由は微分方程式の右辺がリプシッツ条件を満たしていないから。ここでリプシッツ条件とは、任意の x, y_1, y_2 に対し、微分方程式の右辺（$f(x, y)$ と書く）が

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

を満たすことである。ただし K はある定数である。これが満たされないと、微分方程式の解の一意性が保証されない。

さて、実際に今の問題に当てはめてみると、$f(x,y)=\sqrt{y}$ である。ここで

$$|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|\le K|y_1-y_2|$$

を満たす定数 K が存在すると仮定する。特に $y_2=0$ にとれば

$$|\sqrt{y_1}-\sqrt{0}|=\sqrt{y_1}\le Ky_1=K|y_1-0|$$

となるはずである。さらに $y_1>0$ にとり、これを整理すれば、$1\le K\sqrt{y_1}$。ところで y_1 を $y_1<1/K^2$ となるようにとれば $K\sqrt{y_1}<1$ となり矛盾。したがって $\sqrt{y}$ はリプシッツ条件を満たさない。

■解説■

微分方程式論における解の存在と一意性の証明において、その前提条件の一つとして挙げられるのが今回のリプシッツ条件です。そこで今回は、もしリプシッツ条件を満たさなかったらどうなるかという例を問題として取り上げました。

■問題■

[問] エルミート行列の、異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

■後記■

おかげさまで、今月号で創刊一周年を迎えました !!

月一の発刊なので一周年と言っても１３号しか出てないんですけどもね。

このメルマガではとにかくオーソドックスな問題を出すことを続けていきます。それを以って、読者のみなさまがいろんな数学の分野を垣間見ることができれば、このメルマガを出す私の本望です！

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。
大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。
またインターネット環境を使っての学習になりますので、ご自宅にいながら勉強を進めていくことができます。

本郷（ほんきょう） http://honkyo.jp/

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/