_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 12 回】待ち行列

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] ある郵便局に ATM（現金自動預払機）が一台置いてあるとする。ATM には一時間当たり平均 a 人の人が訪れる。また一人の人が ATM を操作するのに一時間あたり平均 b 時間かかるものとする。さて、このときに ATM の前にできる行列の長さ（人数）の均衡状態での期待値を求めよ。ただし $ab < 1$ とする。

ヒント：この手の問題では通常次の確率分布が仮定されますが、ここでもそれを使ってください。
　単位時間当たりに ATM に訪れる人数→ポアソン分布
　一人の人が ATM を操作する時間→指数分布

[解] ATM には一時間当たり平均 a 人の人が訪れることから、ある人が ATM に並んだあと、次の人がやってくるまでの時間間隔は平均 $1/a$ 時間の指数分布に従う。したがって、ある人が並んだ直後から Δt 時間後の間に次の人がやってくる確率は $1 - e^{-a\Delta t} \sim a\Delta t$ となる。同様に、一人の人が ATM を操作し始めて Δt 時間以内に終える確率は $1 - e^{-\Delta t/b} \sim \Delta t/b$ となる。

時刻 t における行列の長さが n である確率を $P_n(t)$ とする。$t + \Delta t$ 時間後における確率分布 $P_n(t + \Delta t)$ を求めよう。これは次のように求められる。

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) + a\Delta t P_{n-1}(t) + \Delta t/b P_{n+1}(t) - a\Delta t P_n(t) - \Delta t/b P_n(t)$$

右辺第一項は何も変化がない場合の寄与を表す。右辺第二項は、一人少ない状態において新しい人が ATM に並ぶ確率を表す（$a\Delta t$ は条件付確率であったことに注意)。右辺第三項は、一人多い状態において ATM での操作が一人終了したことを表す。第二、三項は変化の結果行列の長さが n 人になったということなので、$P_n(t+\Delta t)$ にプラスの寄与を与える。右辺第四項は、n 人の状態において新しい人が ATM に並ぶ確率で、右辺第五項は、n 人の状態において ATM での操作が一人終了したことを表す。第四、五項は変化の結果行列の長さが n 人でなくなったということなので、$P_n(t+\Delta t)$ にマイナスの寄与を与える。

$\Delta t \to 0$ の極限では、

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = aP_{n-1}(t) + \frac{1}{b}P_{n+1}(t) - aP_n(t) - \frac{1}{b}P_n(t)$$

となる。均衡状態では $\frac{d}{dt}P_n(t) = 0$ なので

$$aP_{n-1}(t) + \frac{1}{b}P_{n+1}(t) - aP_n(t) - \frac{1}{b}P_n(t) = 0$$

を得る。さてこの漸化式を解くために（常套手段として）$P_n(t) = cx^n$ とおこう。ただし c は n によらない定数。すると

$$ax^{n-1} + \frac{1}{b}x^{n+1} - ax^n - \frac{1}{b}x^n = 0$$

を得る。これを解くと、$x = 0, 1, ab$。さて、確率の総和は 1 なので、$\sum P_n = \sum cx^n = 1$。したがって $x = 0, 1$ は妥当でなく、$x = ab$ と決まる。長さの期待値は

$$\sum nP_n = \sum nc(ab)^n = c\frac{ab}{(1-ab)^2}$$

一方、規格化条件より $c = (1-ab)^{-1}$ なので行列の期待値は $ab/(1-ab)$ となる。

■解説■

この問題はオペレーションズリサーチの世界で「待ち行列」と呼ばれていて、典型的な確率過程の問題になっています。今回は ATM が一台だけだったので初等的に解けましたが、いろんなバリエーションの問題があり、非常に面白い分野の一つです。

■問題■

[問] $y \geq 0$ 上で定義された微分方程式 $y' = 2\sqrt{y}$ の解を考える。この解の一つは $y = (x-C)^2$ である。ここで C は任意定数である。また方程式の形から明らかに分かるように $y = 0$ もまた解になっている。さらに任意の定数 C に対して、

$$\begin{cases} 0 & x < C \\ (x-C)^2 & x \geq C \end{cases}$$

もやはり解になっている。そこで次のことが分かる。すなわち、微分方程式 $y' = 2\sqrt{y}$ の解で、初期条件 $y(0) = 0$ を満たすものは

$$\begin{cases} 0 & x < C \\ (x - C)^2 & x \geq C \end{cases}$$

である。ただし C は $C \geq 0$ なる任意の定数。さて、このように解が一意に決まらない理由を述べよ。

■後記■

今気付きましたが、今回は１２回目の発行であり、このメルマガは月一回の発行ですので、ちょうど一年継続できたということになります。月一なので「一年継続」といっても大したことないと思われるかも知れませんが…。

というわけで次号は一周年記念ということになります。特に何も企画していないのですが、どうぞお楽しみに !!

_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。

公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/