_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 9 回】稠密

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] X の部分集合 A が X の空でない任意の開集合と共通部分を持つとき、A は X の中で稠密であるという。実数の集合 $\mathbf{R}$ において、有理数の集合 $\mathbf{Q}$ および無理数の集合 $\mathbf{Q}^c$ はいずれも稠密であることを示せ。

証明の中では、必要に応じてアルキメデスの原理
「任意の正数 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $na > b$ なる整数 n が存在する」
を使え。

[解] $\mathbf{R}$ の任意の開集合はいくつかの開区間の和集合なので、任意の一つの開区間 (a, b) に対してその中に有理数と無理数が必ず含まれることを示せば十分。
任意の実数 α をとる。適当な整数 m, n をとることによって、$a < \alpha m/n < b$ を示す。そうすれば、α を有理数（無理数）にとれば、$\alpha m/n$ も有理数（無理数）なので、題意が示される。
一般性を失うことなく、$a, \alpha > 0$ としてよい。まず $b - a > 0$ なので $n(b-a) > \alpha$ なる整数 n が存在する。よって $na + \alpha < nb$。また、$na < m\alpha$ なる整数 m が存在する。ところでこのような m の中で最小のものを m と置きなおすと、$(m-1)\alpha < na < m\alpha$ となる。よって $na < m\alpha < nb$。

■問題■

[問] 群 G の任意の部分集合 M に対して、それを含む最小の正規部分群が存在することを示せ。

■後記■

ヒッグス粒子の発見がいよいよ確定的になったそうですね。素粒子の標準理論で予言されている中で唯一見つかっていなかった素粒子でしたが、ついに見つかったのかという思いと、そこまで実験できる大掛かりな設備を人類が構築したんだなという感慨とがあります。

次は超対称粒子の番でしょうか。標準理論はある意味「確実な理論」と考えられてきたので、今回のヒッグス粒子の発見も「やっとか」という感想です（少なくとも私にとっては)。しかし、もし超対称粒子が発見されれば、今まで仮説でしかなかった超対称性理論が、いよいよ有力な証拠を得ることになるというわけです。

いずれにしても、ヒッグス粒子発見のニュースはおめでたいですね！

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/