_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 8 回】凸関数の連続性

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 一変数実関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の定義域の全ての点で f が凸ならば、f は連続であることを証明せよ。ただし $f(x)$ が上に凸とは、$0 \leq \lambda \leq 1$ に対し

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

のことであるとする。また $f(x)$ が下に凸とは、

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

のことであるとする。

[解] ここでは、上に凸である場合について考えよう。下に凸である場合は不等号を逆にすればよい。
以下、常に $x_3 > x_1$ および $0 \leq \lambda \leq 1$ であるものとする。
まず、$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$ に対して

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

を示そう。

$$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 = -(1-\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_3 + x_1$$

より

$$x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_3 - x_1)$$

を得る。一方 f の凸性

$$f(x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) = -(1-\lambda) f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) + f(x_1)$$

より

$$f(x_2) - f(x_1) \geq (1-\lambda)(f(x_3) - f(x_1))$$

を得る。以上より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \tag{1}$$

を得る。同様にして

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \tag{2}$$

を得る。

次に、$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3$ に対して

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

であることを示そう。

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3 = x_2 = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_2$$

より

$$\lambda(x_2 - x_1) = (1-\lambda)(x_3 - x_2)$$

を得る。一方 f の凸性

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) \leq f(x_2) = \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_2)$$

より

$$\lambda(f(x_2) - f(x_1)) \geq (1-\lambda)(f(x_3) - f(x_2))$$

を得る。以上より

$$\frac{\lambda(f(x_2) - f(x_1))}{\lambda(x_2 - x_1)} \geq \frac{(1-\lambda)(f(x_3) - f(x_2))}{(1-\lambda)(x_3 - x_2)}$$

つまり

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{3}$$

を得る。

さて、点 x_2 における f の連続性を調べよう（以後、 x_2 は固定し、x_1 と x_3 を $x_1 < x_2 < x_3$ となるようにとる)。まず x_1 を固定して x_3 を x_2 に近づけることを考える。(1) の結果より、(3) の右辺は $x_3 \longrightarrow x_2$ に対して単調増加する。一方 (3) の左辺は一定なので、(3) の右辺は上に有界な単調増加である。したがって、ある値に収束する。故に、f は x_2 で右微分が存在することになり、したがって右連続である。同様に、x_3 を固定して x_1 を x_2 に近づけることを考え、(2) の結果を使うと、f は x_2 で左微分が存在することになり、したがって左連続である。

■解説■

証明の中で不等式を三つ証明していますが、グラフを描いてみれば、その幾何学的意味が一目瞭然ですので、ぜひ紙と鉛筆を片手にもう一度読んでみてください。定義域の各点で凸であれば、それだけで連続になってしまうというのが面白く、私自身個人的に気に入っている命題です。

■問題■

[問] X の部分集合 A が X の空でない任意の開集合と共通部分を持つとき、A は X の中で稠密であるという。実数の集合 $\mathbf{R}$ において、有理数の集合 $\mathbf{Q}$ および無理数の集合 $\mathbf{Q}^c$ はいずれも稠密であることを示せ。証明の中では、必要に応じてアルキメデスの原理

「任意の正数 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $na > b$ なる整数 n が存在する」

を使え。

■後記■

６月となりましたが、何だか平年よりも寒い感じです。

節電には有利かも知れませんが、農作物の収穫がそれよりもずっと心配です。昔私が学生だった頃、やはり夏場でも長袖を着てもさほど暑くなかった年がありましたが、その冷夏の翌年は米不足となり、外国から輸入していました。
そのとき私は二重の意味でショックを受けました。一つは米自給率 100%を超える日本がお米を輸入するということ。もう一つはタイ米の味。
ちなみに、タイ米は最初は食べずらかったものの、数ヵ月後にはだいぶ慣れたという記憶があります。カレーで食べると合うと聞いたのですが、結局それを試しそこなったのが心残り。

本郷（ほんきょう） http://honkyo.jp/

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼△▼

_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
メルマガ登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/