

../

ゆったり楽しむ高等数学

【第6回】grad

../

【趣旨】

数学の楽しみ方には二つ(もっと?)あると思います。

一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。

もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

初めてこのメルマガを読まれる方は、
<http://phys.main.jp/melmag/melmag.html>
にも目を通していただくと、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

前回の問題と解答例

[問] $z = f(x, y)$ のグラフを考えよう。点 (x_0, y_0) での f の任意の方向微分を考えたときに、最大の勾配を与える向きは $\text{grad} f$ に平行である。

[解] 方向微分の任意の向きを $\mathbf{l} = (l \cos \theta, l \sin \theta)$ とする。方向微分の値は $\partial f / \partial l$ であるが、これは

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。ところで (x, y) と (l, θ) は

$$x = l \cos \theta, \quad y = l \sin \theta$$

の関係があるので、

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

を得る。

さて、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha), \quad \tan \alpha = a/b$$

が成り立つので、特に $\theta = \alpha$ のとき、およびその時に限り左辺は最大になり、 $\theta = \alpha + \pi$ のとき最小になる。いずれの場合も、 $\tan \theta = a/b$ である。このことを使えば、 $\partial f / \partial l$ が最大値をとるならば、 $(\cos \theta, \sin \theta)$ は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \text{grad} f$$

と同じ向きあるいは反対の向きである。

解説

この問題から分かるように、 $\text{grad} f$ は f を山の高さを見たときに、もっとも坂が急な方向を指すということが分かります。力学によれば、力の向きは $-\text{grad} f$ で与えられるとされており、これは要するに、坂がもっとも急な方向に沿って物が落ちていくということを意味します。これは直感と一致します。

問題

[問] 可換環 R を考える。 I が R の極大イデアルであることと、 R/I が体であることは同値であることを示せ。

キーワードは極大イデアルです。ちなみに、この問題は代数学において非常に有用な定理になっています。

後記

4月になりました。学校では新学期の始まりです。新入生も進級した人たちも期待を持って今の時を迎えていることだろうと思います。

社会人の私も4月になると何だか心機一転した気分になります。あくまでも気分だけですが...。いずれにしても、この心機一転した「気分」をなるべく長く持続させたいものです。

広告

インターネット家庭教師 <http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/lecture.html>

数学や物理学を学びたいという方を対象に、学習のお手伝いをさせていただいております。
大学学部以上の数学と物理学（およびその周辺分野）専門になっております。
またインターネット環境を使つての学習になりますので、ご自宅にいながら勉強を進めていくことが
できます。

本郷（ほんきょう） <http://honkyo.jp/>

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

../

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克

e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp （a）を@に変えてください。

公式サイト：<http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/>

登録・解除：<http://www.mag2.com/m/0001366532.html>

../