_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第4回】ε-δ論法

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回のペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] ある数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるとき、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

を証明せよ。

[解] 任意の $\varepsilon > 0$ をとる。仮定よりある N が存在し、$n > N$ なる全ての n に対し、$|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ。すると任意の $n > N$ に対し、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N - Na}{n} + \frac{a_{N+1} + \cdots + a_n - (n-N)a}{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_N - a)}{n}\right| + \frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
&< \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_N - a)}{n}\right| + \frac{(n-N)\epsilon}{n} \\
&\leq \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_N - a)}{n}\right| + \epsilon
\end{aligned}$$

ところで、有限和 $(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots (a_N - a)$ は有界なので $|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots (a_N - a)| <$

M なる定数 M が存在する。従って改めて $n > \max\{N, M/\varepsilon\}$ ととれば、

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} - a\right| &< \frac{M}{n} + \varepsilon \\ &< \frac{n\varepsilon}{n} + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

を得る。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = a$$

である。

■解説■

まず、$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ を直感的にとらえてみましょう。a_n は a に収束することから、n が大きくなるにつれて、分子は na と大差なくなるということになります。というのは、n が十分大きいときの a_n の値は極めて a に近く、それらが分子の和に大きな寄与を果たすからです。そして na を n で割るわけですから、極限値は a になりそうだという予測が立ちます。

ですから、実際の証明においても、分子を前半（$n \leq N$）と後半（$n > N$）に分けるところがミソになります。前半の分子は有限和になっているので、分母の n が大きくなればなるほど、前半は 0 に近づきます。一方、後半は $a_n \to a$ の仮定があることから、分子の各項自体が 0 に近くなっています。ただし、項の数も n が大きくなるにつれて増えていきますから、そこはきちんと解析が必要なのですが、この問題の場合は、後半も 0 に収束していくのが分かります。

■問題■

[問] ある医療研究機関が、確度の高いガン発見方法を開発した。大勢のガン患者に対して、この方法をテストした結果、99% の確率で陽性反応が出た。一方、大勢の健常者に対してもこのテストをやってみると 2% だけではあるが、やはり陽性反応が出た。さて統計的調査によれば、全人口の 0.1% はガンにかかっているということが分かっているとする。さて、巷から無作為に選んだある被験者に対し、このテストをしたら陽性反応が出たとする。このとき、この被験者がガンではない確率を求めよ。

今回は確率論からです。確率論をやった方には見たことのある有名なタイプの問題ですね。

■後記■

最近知ったのですが、ちくま学芸文庫さんから、志村五郎先生の著作が出ているのですね。このメルマガ読者ならご存知であろう志村・谷山予想で有名な志村五郎先生です。 志村・谷山予想がフェルマーの最終定理の解決に大きく貢献したというのは有名な話です。その志村先生が一般向けに本を書かれています。

数学をいかに使うか (ちくま学芸文庫)

数学の好きな人のために: 続・数学をいかに使うか (ちくま学芸文庫)

その場で買おうと思ったのですが、財布に５００円ちょっとしかなく、あえなく断念。しかし、図書館に本があるとの情報を得たので、今度予約しに行きます！

ところで、ちくま学芸文庫さんはランダウ・リフシッツの物理学小教程を復刊されるなど、我々のニーズをうまく汲み取ってくれていて、とても注目しています。

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/