_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 3 回】上極限集合・下極限集合

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 集合族 $A_n, n \in \mathbf{N}$ を考える。ただし $\mathbf{N}$ は自然数の集合である。このとき

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

はそれぞれどんな集合かを述べよ。ちなみに、これらはそれぞれ上極限集合 $\limsup E_n$、下極限集合 $\liminf E_n$ と呼ばれる。

[解] まず上極限集合から見よう。その元を x とすると、x は任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し、$x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ である。言い換えると、任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し、ある $n \geq k$ が存在して、その x は E_n の元である。どんなに大きな k をとっても x はなんらかの E_n に属しているということである。これは簡単に言えば、x は無限個の E_n に属しているということになる。

次に下極限集合を見よう。その元を x とすると、x はある $k \in \mathbf{N}$ に対し、$x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$ である。言い換えると、ある $k \in \mathbf{N}$ に対し、全ての $n \geq k$ に対して、その x は E_n の元である。ある程度の大きさの k をとってしまえば、 それ以上の全ての n を持つ E_n に x は属するということである。これは簡単に言えば、有限個の E_i を除く全ての E_n に x は属しているということになる。

■解説■
無限個の集合が出てくるので少しとまどうかも知れませんが、和集合および共通部分の定義を思い出しながら、一つ一つ切り分けていけば解ける問題でした。

ところで、下極限集合の任意の元は、「有限個の E_i を除く全ての E_n」に属していることから、無限個の E_n に属していることになります。
したがって $\liminf E_n \subset \limsup E_n$ が分かります。

■問題■

[問] ある数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるとき、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

を証明せよ。

今回は解析学の教科書などでよく出てくるおなじみの問題です。$\varepsilon - \delta$ 論法を思い出して、解いてみてください。

■後記■

新しい年になりました。

このメルマガはまだ３回目と創刊したばかりではありますが、今年もご愛顧のほどよろしくお願いいたします。

みなさんは今年の年間目標や計画は立てられましたか？ 私は、仕事の実用も兼ねて統計学とＯＲを重点的にやろうかと思います。

またインターネット環境を使っての学習になりますので、ご自宅にいながら勉強を進めていくことができます。

本郷（ほんきょう） http://honkyo.jp/

著者の知り合いが経営している健康関連のお店です。
特にアトピーなど肌が弱い人のためにおススメの石鹸があります。
もちろん敏感肌の方にも！

_/

ゆったり楽しむ高等数学

発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/