_/

ゆったり楽しむ高等数学
【第 2 回】部分群

_/

【趣旨】
数学の楽しみ方には二つ（もっと？）あると思います。
一つは今ある知識を使って難問を解く楽しみ。
もう一つは数学の美しい理論体系を知る楽しみ。

このメルマガでは後者を読者として想定し、だいたい月一回の
ペースで高等数学の基礎的な問題を出題します。

※初めてこのメルマガを読まれる方は、
http://phys.main.jp/melmag/melmag.html
にも目を通していただけると、よりお楽しみいただけます。
このメルマガの意義と読み方を簡単に説明しています。

■前回の問題と解答例■

[問] 群 G の二つの部分群 A, B に対して、AB が G の部分群となるためには、$AB = BA$ が成り立つことが必要十分であることを証明せよ。

AB とは群 A の任意の元 a と群 B の任意の元 b の積を集めた集合です。特に A の元が左側、B の元が右側に来ることに注意しましょう。$AB = BA$ は集合として等価という意味であり、決して任意の a, b に対して $ab = ba$ を意味するわけではありません。すなわち「$ab = b'a'$ となるような $a' \in A, b' \in B$ が存在する」ということを意味します。なお、下記の十分条件の証明では集合 AB が単位元を含むことを言わなければ、完全な証明とはなりませんが、これは読者にお任せします。

[解] 証明の前に、次のことを示そう。すなわち、AB が G の部分群ならば、BA も G の部分群になる。実際、任意の $a, a' \in A, b, b' \in B$ に対し、$bab'a' = ((bab'a')^{-1})^{-1} = (a'^{-1}b'^{-1}a^{-1}b^{-1})^{-1}$ であるが、AB は群なので、ある $a'' \in A, b'' \in B$ を使って $a'^{-1}b'^{-1}a^{-1}b^{-1} = a''^{-1}b''^{-1}$ と書ける。従って $bab'a' = (a''^{-1}b''^{-1})^{-1} = b''a''$ を得る。また $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ であるが、AB は群なので、ある $a' \in A, b' \in B$ を使って $a^{-1}b^{-1} = (a'b')^{-1}$ と書ける。従って $(ba)^{-1} = (a'b')^{-1} = b'^{-1}a'^{-1}$ を得る。以上より BA も G の部分群であることが分かった。

それでは証明を始めよう。

AB が G の部分群であると仮定する。任意の $a \in A, b \in B$ に対し、ba は $a^{-1}b^{-1} \in AB$ の逆元である。AB は群だから、$a^{-1}b^{-1}$ の逆元である ba も AB の元となる。従って、$BA \subset AB$ が得られる。同様の議論で $AB \subset BA$。ゆえに $AB = BA$。

逆に、$BA = AB$ であると仮定する。任意の $ab, a'b' \in AB$ に対し、$aba'b' = aa''b''b'$ となる。ただし ba' は BA の元であるから、仮定よりある $a''b'' \in AB$ を使って $ba' = a''b''$ と書けることを使った。従って $aba'b' \in AB$。また $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA$ であるが、やはり仮定よりこれも AB の元である。故に AB は部分群。

■解説■

H が 群 G の部分群であるというのは、H が G の部分集合になっていて、かつ H 自身が群になっているということです。
今回の証明では、H が群をなしていること、すなわち、積について閉じていて、単位元と逆元を持つということを愚直に示しました。
ところで、部分群であることを一発で示すことのできる命題があります。それは
「任意の元 $a, b \in H \subset G$ について、$ab^{-1} \in H$ ならば H は G の部分群である」
というものです。
実際、これが正しければ、H が積について閉じていて、単位元と逆元を持つことが帰結されます。
読者の中には、この命題を使って証明した方もおられるでしょうね。

■問題■

[問] 集合族 $A_n, n \in \mathbf{N}$ を考える。ただし $\mathbf{N}$ は自然数の集合である。このとき

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

はそれぞれどんな集合かを述べよ。ちなみに、これらはそれぞれ上極限集合 $\limsup E_n$、下極限集合 $\liminf E_n$ と呼ばれる。

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n$ とは任意の A_n に属する元の全体であり、$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$ とはいずれかの A_n に属する元全体を意味します。

■後記■

１２月になり朝晩が冷え込んできました。みなさん風邪など引かぬよう十分体調管理しましょう。特に年末は仕事も忙しくなる時期ですしね。受験生もいよいよラストスパークをかけ始めるといったところでしょうか。
ところで、先日うちの次男坊（０歳）がウィルス性胃腸炎にかかりまして。てっきりこういうのは夏に流行るもんだと思っていましたが、今の季節でも流行するのですね。インフルエンザだけでなく、いろんな病気に万全の対策をしなければ…。

_/

ゆったり楽しむ高等数学
発行者：柴尾昌克
e-mail：dirac_eqn(a)yahoo.co.jp　(a) を@に変えてください。
公式サイト：http://www.geocities.co.jp/tsure2gusa/
登録・解除：http://www.mag2.com/m/0001366532.html

_/